

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

ПРОГРАМА

**ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З ДИСЦИПЛІНИ**

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Дніпропетровськ 2014

Міністерство освіти і науки України
Національний гірничий університет

**ПРОГРАМА
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З ДИСЦИПЛІНИ
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**

Рекомендовано до видання науково-методичною радою університету
(протокол № від)

Дніпропетровськ
ДВНЗ «НГУ»

2014

Програма та контрольні завдання з дисципліни «Вища математика» для студентів заочної форми навчання / Уклад. С.Є. Тимченко, С.М. Подольська, М.І. Горбатов, Д.В. Клименко – Дніпропетровськ: ДВНЗ «НГУ», 2014. – 36 с.

Укладачі:

С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.

С.М. Подільська, ст. викладач.

М.І. Горбатов, ст. викладач.

Д.В. Клименко.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри вищої математики
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Мета даних методичних вказівок - допомогти студентам-заочникам правильно організувати свою самостійну роботу з оволодіння курсом вищої математики. Тут викладені загальні рекомендації з організації навчальної роботи і виконання контрольних завдань, програма курсу вищої математики, список літератури і завдання для контрольних робіт.

I. Загальні рекомендації студенту-заочнику з організації навчальної роботи над курсом вищої математики і виконання контрольних робіт

Основна форма навчальних занять студентів-заочників - самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається із наступних основних елементів: вивчення матеріалу за підручниками, розв'язування задач, самоперевірки і виконання контрольних робіт.

Керівництво і контроль самостійної навчальної роботи студентів здійснюють деканат і викладачі кафедри вищої математики на лекціях і практичних заняттях під час установчої сесії, під час консультацій в процесі рецензування контрольних робіт у міжсесійний період, а також на іспитах і заліках у період екзаменаційної сесії.

Вивчення матеріалу за підручником

Керівним документом для студента-заочника в роботі над курсом вищої математики служить програма, матеріал якої необхідно самостійно вивчити за підручником, звертаючи увагу на визначення основних понять курсу (границя, функція, похідна, первісна та ін.) і на приклади, які ілюструють ці визначення. Необхідно добиватися чіткої уяви про допущення і твердження теорем та повного розуміння їх доведення.

Настійно рекомендується вести короткий конспект, куди в належному порядку записувати назви питань, визначення, формулювання теорем і формули. На полях конспекту слід відмічати питання, які необхідно вияснити на консультаціях. Дуже корисно вести також робочий зошит з математики, де студент по пам'яті може довести теореми, відтворити розв'язування прикладів із підручника, побудувати аналогічні приклади, навести формули, розв'язати

самостійно задачі, які дані у вказівках для кожного розділу. Правильно оформлені конспект і робочий зошит привчають до порядку в роботі і полегшують вивчення вищої математики, так як процес повторювання і записування сприяє засвоєнню і запам'ятовуванню навчального матеріалу.

Розв'язування задач

Один із кращих методів засвоєння, перевірки і закріплення теоретичного матеріалу - розв'язування задач. При розв'язуванні кожної задачі потрібно продумати план розв'язування і чітко обґрунтувати всі етапи цього плану, виходячи із теоретичних тверджень курсу. Якщо задача не розв'язується, слід ще раз уважно продивитися відповідний теоретичний матеріал і самостійно розв'язати наведені в підручнику задачі. Розв'язування задачі слід докладно

записати у робочому зошиті і довести до відповіді, яка вимагається умовою. Дуже корисно перевірити відповідь, розв'язавши задачу іншим способом або критично оцінивши цю відповідь. Продовжувати розв'язування задач певного типу необхідно до вироблення навичок їх розв'язування.

Консультації

Якщо при вивченні теоретичного матеріалу, розв'язуванні задач, самоперевірці або виконанні контрольної роботи у студента виникають будь-які утруднення, він може звернутися в академію для одержання консультацій. Питання, винесене на консультацію повинно бути конкретним, з точною вказівкою місця в доведенні теореми, розв'язуванні задачі і т.п., починаючи з якого він, студент, потребує допомоги.

Важливим показником у навчальній роботі є вміння розбиратись самостійно в усіх питаннях програми, тому студенту слід звертатися за консультацією лише після кількох безрезультатних спроб самостійного вирішення питання, яке викликало утруднення.

Контрольна робота

Контрольна робота - важлива форма керівництва навчальними заняттями студента-заочника. Приступати до виконання контрольної роботи можна лише після вивчення відповідних розділів курсу і розв'язування достатньої кількості

задач.

При виконанні контрольної роботи студент повинен строго дотримуватися таких вимог:

- 1) виконувати контрольні роботи строго за своїм варіантом, номер якого співпадає з останньою цифрою його навчального шифру;
- 2) кожен контрольну роботу виконувати в окремому зошиті в клітинку чорнилами будь-якого кольору крім червоного. У зошиті повинні бути поля для зауважень рецензента; в кінці зошита залишити кілька чистих аркушів для доповнень і виправлень у відповідності із зауваженнями рецензента;
- 3) оформлення обкладинки зошита повинно відповідати наведеному зразку

Контрольна робота № _____
з вищої математики
студента _____ П.І.Б. _____
групи _____ заочного факультету
Державного вищого навчального закладу
Національний гірничий університет
Шифр _____ Дата _____
Домашня адреса _____.

Наприкінці роботи (в тексті) поставити дату виконання і особистий підпис.

- 4) Робота, яка виконана (повністю або частково) за чужим варіантом, не зараховується;
- 5) Перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписати її умову, замінивши загальні дані конкретними зі свого варіанту;
Розміщувати задачі (і їх розв'язування) в порядку зростання номера, зберігаючи нумерацію.
- 6) Розв'язування задач записувати акуратно, докладно, супроводжуючи

необхідними кресленнями.

Робота, виконана з будь-якими порушеннями перерахованих вимог, не зараховується і повертається студенту для переробки.

Студент, який не виконав хоча б одну контрольну роботу, до іспиту не допускається.

Іспити і залік

Іспити і залік з вищої математики служать для перевірки і оцінки роботи студента-заочника із засвоєння теоретичних питань програми, для перевірки і оцінки вміння застосовувати теорію до розв'язування задач, для розвитку творчого мислення, набуття навичок самостійності та ін.

Знання студента можуть бути визнані задовільними лише в тому випадку, якщо він точно і глибоко формулює визначення і теореми, робить висновки про їх застосування в розв'язуванні задач, а також впевнено і без помилок розв'язує типові задачі.

Приймання заліків і екзаменів проводиться в порядку і обсязі, які встановлені навчальними планами і програмою курсу.

II. Програма курсу вищої математики

Лінійна алгебра

Поняття матриці. Основні дії з ними. Визначники другого, третього, n -го порядків. Властивості визначників. Мінор. Алгебраїчне доповнення. Ранг матриці, методи його визначення. Обернення матриці.

Методи розв'язування систем лінійних рівнянь: матричний метод, формули Крамера, метод Гаусса.

Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою визначників. Неоднорідна лінійна система рівнянь. Однорідна лінійна система. Нетривіальні розв'язки однорідної лінійної системи. Фундаментальна система розв'язків. Загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальна лінійна система. Теорема Кронекера-Капеллі. Власні числа та власні вектори.

Векторна алгебра

Скаляри та вектори. Геометричний вектор. Компланарність та колінеарність векторів. Додавання векторів. Множення вектора на число. Розкладання вектора за базисом. Проекція вектора на вісь. Лінійна залежність та незалежність векторів.

Прямокутна декартова система координат. Системи координат на прямій, площині і у просторі. Довжина і напрям вектора у просторі. Поняття n -мірних векторів та дії з ними. Векторний лінійний простір.

Скалярний добуток двох векторів та його механічний зміст. Координатна форма скалярного добутку. Кут між векторами. Умова перпендикулярності векторів. Векторний добуток двох векторів та його геометричний зміст. Координатна форма векторного добутку. Умова колінеарності векторів. Мішаний добуток 3-х векторів та його геометричний зміст. Умова компланарності 3-х векторів.

Аналітична геометрія

Поняття про рівняння поверхонь та ліній. Площина. Рівняння площини, що проходить через задану точку. Низка площин. Загальне рівняння площини. Окремі випадки. Відстань від точки до площини. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності.

Пряма у просторі. Канонічні рівняння. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Параметричні рівняння. Загальні рівняння прямої. Кутові співвідношення.

Пряма на площині. Загальне рівняння. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння пучка прямих. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Відстань від точки до прямої. Кутові співвідношення.

Криві 2-го порядку. Коло, еліпс, гіпербола, парабола (канонічні рівняння). Спрощення загального рівняння кривої 2-го порядку за допомогою перетворення координат

Введення до математичного аналізу

Границя послідовності (змінної). Нумерована змінна. Послідовність. Нескінченно мала та нескінченно велика змінні величини. Границя послі-

довності (змінної). Основні теореми про границі.

Границя функції. Означення границі функції. Односторонні границі. Обчислення границь. Розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Перша визначна границя. Друга визначна границя.

Неперервність функції. Приріст функції. Визначення неперервності функції в точці. Умови неперервності функції в точці. Типи розривів. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних

Похідна. Визначення похідної, її механічний та геометричний зміст. Загальна схема визначення похідної. Основні правила диференціювання. Похідна складної функції. Похідна неявної функції. Похідна степеневопоказникової функції. Похідна оберненої функції. Похідні вищих порядків. Похідна функції, що задана параметрично. Таблиця похідних.

Диференціал. Визначення диференціала та його геометричний зміст. Властивість інваріантності форми диференціала. Диференціали вищих порядків. Диференціал дуги.

Теореми Ролля. Лагранжа і Коші. Правило Лопіталя. Умови зростання та спадання функцій. Необхідна умова екстремуму функції в точці. Достатня умова екстремуму функції в точці. Дослідження функцій на опуклість та вгнутість. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Повне дослідження функції. Побудова графіків. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Функції багатьох змінних. Визначення функції двох змінних. Приріст функції двох змінних (частинний та загальний). Границя та неперервність функції двох змінних. Частинні похідні функції двох змінних. Узагальнення на випадок функцій n змінних. Частинні похідні вищих порядків. Диференціювання складеної функції. Формула повної похідної. Диференціювання неявної функції однієї та двох змінних. Екстремум функції двох змінних. Необхідна і достатня умови екстремуму функції двох змінних. Умовні екстремуми. Метод множників Лагранжа.

Інтегральне числення

Первісна та її властивості. Означення невизначеного інтеграла та його властивості. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування. Безпосереднє інтегрування. Найпростіші підстановки. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику. Інтегрування частинами. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтегрування тригонометричних виразів. Інтегрування ірраціональностей. Тригонометричні підстановки.

Визначений інтеграл. Визначення та властивості. Визначений інтеграл як функція верхньої границі. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами. Геометричні застосування визначеного інтеграла (обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму тіла обертання).

Невластиві інтеграли. Інтеграли з нескінченними границями. Інтеграли від необмежених функцій.

Кратні інтеграли. Подвійний та потрійний інтеграли їх властивості. Обчислення подвійних інтегралів у декартових і полярних координатах. Обчислення потрійних інтегралів у декартових і циліндричних координатах. Криволінійні інтеграли першого та другого роду. їх властивості та обчислення. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття та визначення. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Лінійний оператор та його властивості. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Визначення частинного розв'язку за видом правої частини. Метод варіації довільних сталих.

Нормальні системи диференціальних рівнянь першого порядку. Метод

виключення. Розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння.

Ряди

Числові ряди. Нескінченна геометрична прогресія. Основні поняття та визначення. Знакостали ряди. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності: порівняння рядів; ознака Даламбера; радикальна та інтегральна ознаки Коші. Знакозмінні ряди. Визначення. Ознака збіжності (теорема Лейбніца). Абсолютна та умовна збіжності. Узагальнена ознака Даламбера.

Функціональні ряди. Область збіжності функціонального ряду. Степеневий ряд. Теорема Абеля про область збіжності степеневому ряду. Радіус збіжності. Рівномірна збіжність. Властивості рівномірно збіжних рядів. Розвинення функцій у степеневі ряди. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Розвинення деяких елементарних функцій у ряд Маклорена.

Застосування рядів до наближених обчислень: обчислення значень функцій, обчислення визначених інтегралів, інтегрування деяких диференціальних рівнянь.

III. Задачі для контрольних робіт

У задачах 1 – 10 розв'язати систему лінійних рівнянь а) за методом Крамера; б) за методом Гаусса; в) матричним методом.

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 3x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x + 8y + z = 2 \\ 3x - 2y + 6z = -7 \\ 2x + y - z = -5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 2x - 5y + 4z = 2 \\ 3x - 10y - z = -4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x - 2y + 2z = 13 \\ 3x + 2y - 10z = -33 \\ -2x + y + 5z = 7 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y + 5z = 4 \\ 5x - 2y + 13z = -23 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 9 \\ 2x - y - 3z = -2 \\ x + 5y + z = 7 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

У задачах 11-20 дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність та у разі сумісності знайти її загальний розв'язок.

$$11. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 14 \end{cases}$$

У задачах 21-30 побудувати фундаментальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь.

$$21. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

У задачах 31-40 задані координати вершин піраміди ABCD. Знайти:

а) довжину ребра АВ;

б) кут між ребрами АВ і АС;

в) рівняння грані ABD;

г) кут між ребром АС та гранню ABD;

д) рівняння висоти, що опущена з вершини С на грань ABD;

е) об'єм піраміди ABCD.

31. A(3;-1;0); B(0;-7;3); C(-2;1;-1); D(3;2;6)

32. A(1;2;0); B(2;1;1); C(3;0;1); D(2;3;-1)
33. A(1;1;1); B(2;3;-1); C(0;-1;2); D(3;0; 1)
34. A(1;-1;0); B(2;1;-1); C(1;-1;-2); D(-1;2;3)
35. A(1;-1;0); B(2;1;-1); C(1;-1;-2); D(-1;2;3)
36. A(0;6;4); B(3;5;3); C(-2;11;-5); D(1;-1;1)
37. A(2;3;-4); B(-2;3;3); C(1;0;-2); D(-1;1;2)
38. A(-2;3;4); B(-1;2;0); C(2;2;-1); D(0;2;1)
39. A(-2;5;3); B(0;0;3); C(2;5;-3); D(1;-1;2)
40. A(0;1;-1); B(-2;3;1); C(4;0;-1); D(2;-1;-2)

У задачах 41-50 задані координати вершин трикутника ABC. Знайти:

- а) довжину сторони АВ;
- б) рівняння сторони АС;
- в) рівняння висоти, що опущена з вершини В на сторону АС;
- г) рівняння медіани, що проведена з вершини С на сторону АВ;
- д) рівняння бісектриси внутрішнього кута А трикутника;
- е) площу трикутника ABC.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 41. A(-5;2); B(3;5); C(2;-4) | 42. A(1;-2); B(4;3); C(7;-6) |
| 43. A(-9;8); B(2;10); C(-10;1) | 44. A(-6;-5); B(5;-9); C(-5;6) |
| 45. A(-2;-2); B(2;5); C(-8;4) | 46. A(-7;-1); B(5;8); C(3;-6) |
| 47. A(7;4); B(-6;5); C(-5;-6) | 48. A(-2;8); B(3;10); C(-3;-4) |
| 49. A(-8;5); B(5;8); C(-1;-6) | 50. A(9;2); B(-5;10); C(-4;-6) |

У задачах 51-60 виконати вказані завдання.

51. Написати рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, котрий перпендикулярний щодо прямій $5x + 2y - 13 = 0$.

52. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$, які проведені через точки перетину цього кола з віссю ОХ.

53. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, які паралельні прямій $2x + y - 7 = 0$.

54. З точки $P(-9;3)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 78 = 0$.

Обчислити відстань від центру кола до хорди, що сполучає точки дотику.

55. З точки $M(10;-8)$ проведено дотичні до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Скласти

рівняння що сполучає точки дотику.

56. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, які перпендикулярні до прямої $2x - 2y - 13 = 0$.

57. Визначити траєкторію точки M , що рухаючись залишається вдвічі ближчою до точки $F(-1;0)$, ніж до прямої $x + 4 = 0$.

58. Обчислити площу трикутника, який утворене асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

59. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ і кола $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$.

60. Знайти довжину спільної хорди двох парабол $4y = 12 - x^2$ і $4x = 12 - y^2$.

У задачах 61 – 70 обчислити границі, не використовуючи правило Лопітала.

61. а) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{3}} \frac{x^6 + 6x^3 + 9}{x^4 + 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot 5^x + 7 \cdot 2^x}{4^x + 5 \cdot 6^x + 15}$; в) $\lim_{x \rightarrow 26} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 3}{\sqrt{3x-14} - 8}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x^4}{\operatorname{tg} \pi x^6}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 3}{2x^3 - 9} \right)^{x^4 + 7}$.

$$62. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 + 10x - 25}{2x^3 - 11x^2 - 105x}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt{3x^5 + x}}{\sqrt[3]{x^6 + x^2} + \sqrt[4]{x^{10} - 1}};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 26} \frac{\sqrt{7x+4} - \sqrt{31-2x}}{8 - \sqrt{55+3x}}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 - \sin^2 x\right)^{\operatorname{cosec}^2 x + 5}.$$

$$63. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 5x^2 + 4}{x^4 - 16}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^3 + x} + \sqrt[3]{x^4 + 4}}{2\sqrt[4]{5x^6 + 1} + x};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x - 13 + \sqrt[3]{x+8}}{2 + \sqrt[3]{x-1}}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 + 2}{5x^3 - 4}\right)^{x^2}.$$

$$64. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 + 6x^3 - 7x - 14}{5x^2 + 8x - 4}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9x^3 - x + 1}{4x^3 + x^2 + 2x} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^5}\right)\right);$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3 - \sqrt{2x+19}}{\sqrt{x^2 + 11} - 6}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x-1}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \left(3 - \frac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{16} x\right)}.$$

$$65. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^{2x-1} - 343}{9^{x-1} - 81}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 - x}{5x^4 - x^2 + 4}\right)^5; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2 - \sqrt{\frac{7x+9}{x+3}}};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x-6}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{12}\right); \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$66. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{4x^2 + x - \frac{1}{9}}{9x^2 - 3x - 2}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{49^x + 4}{6 \cdot 7^x + 1} - \frac{5x^3 - x^2 + 1}{4x^3 + x}\right);$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{19-x} - \sqrt{11x^3+5}}{x^3 - x}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{1 - \cos 4x^2}}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x^4}\right)^{2x^3}.$$

$$67. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0,6} \frac{5x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 6x}{15x^3 - 9x^2 + 35x - 21}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{7x^2 + 5x} - 2\sqrt[3]{5x^5 + 1}}{\sqrt[4]{x^6 - x^2} + \sqrt[6]{x^{10} + 4}};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[8]{x}}{1 - x^2}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) \operatorname{ctg}^2 x); \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^4)^{\frac{3}{x^4}}.$$

$$68. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^3 - 64}{80 - 5x^2}}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[7]{4x^7 + 10} + 5}{\sqrt[4]{2x^4 + 8} + \sqrt[6]{9x^6 - 7}};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x + 2\sqrt{x} - 15}{x - 7\sqrt{x} + 12}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 13\pi x}{\sin 8\pi x}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^4)^{\operatorname{ctg}^4 x}.$$

$$69. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)\sqrt{3x + 19}}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x \left(\frac{2}{7}\right)^x \left(\frac{4}{9}\right)^x; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt[3]{-2 - x^2} + 3}{2x + 10};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{30 - 3x}{\operatorname{tg} \sqrt{x} - \operatorname{tg} \sqrt{10}}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(x + 5) - \ln x)).$$

$$70. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6 + 16x^3 + 64}{3x^3 + 6x^2 - 19x - 38}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{7 - 9x + 2x^2} \right);$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{\sqrt{5x + 49} - \sqrt{35 + 3x}}; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2 - 45}{\cos 6 - \cos 2x}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} ((3x - 1)(\ln(x - 7) - \ln x)).$$

В задачах 71 – 80 дослідити функції на неперервність за наявності точок розриву встановити їх рід, обчислити стрибки функцій у точках розриву першого роду, побудувати схематичні графіки функцій.

$$71. \quad \text{a)} \quad y = 2^{\frac{4}{5+x}};$$

$$76. \quad \text{a)} \quad y = \left(\frac{\pi}{3,14} \right)^{\frac{1}{2-x}};$$

$$\text{б)} \quad f(x) = \begin{cases} \lg x - 1, & x < 1 \\ 2x - 3, & 1 \leq x < 4. \\ x^2 - 7, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad f(x) = \begin{cases} |x + 3|, & x \in (-\infty; -3] \cup (3; +\infty) \\ 5 \cos \frac{\pi x}{6}, & x \in (-3; 3] \end{cases}.$$

$$72. \quad \text{a)} \quad y = 4e^{\frac{1}{(x-2)^4}} - 3;$$

$$77. \quad \text{a)} \quad y = 1 + \log_3 |x|;$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x < \frac{8}{15} \\ 2x + \frac{13}{30}, & \frac{8}{15} \leq x < 3. \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$73. a) y = \left(\frac{e}{2,8} \right)^{\frac{4}{x+2}};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq -1 \\ 2 - x^2, & -1 < x \leq 3. \\ 3x - 5, & x > 3 \end{cases}$$

$$74. a) y = 2 - 5\pi^{-\frac{1}{(x-3)^2}};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 4 - |3 - x|, & x \leq 5 \\ e^{-|x|}, & x > 5 \end{cases}.$$

$$75. a) y = \frac{3}{1 - 5^{\frac{1}{x}}};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 3 + \sin 2x, & x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x + 3, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \\ 4x + 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 2x^4 - 1, & x \leq -1 \\ x^3 + 2, & -1 < x < 2. \\ 2x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$78. a) y = \frac{|2 - x|}{x^3 - 2x^2};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(5 - 4x^3), & x < -1 \\ -x^2 + 11, & -1 \leq x \leq 3. \\ 2x - 4, & x > 3 \end{cases}$$

$$79. a) y = \operatorname{arctg} \frac{2}{3 + x};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x < -2 \\ -2, & -2 \leq x < 5. \\ x^2 - 4x, & x \geq 5 \end{cases}$$

$$80. a) y = \frac{2x + 1}{(x - 2)^2};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 2^x - 3, & x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2 + x, & -2 \leq x \leq 4. \\ \frac{1}{x - 4}, & x > 4 \end{cases}$$

В задачах 81 – 90 знайти похідну заданих функцій.

$$81. \quad \text{a)} \quad y = \operatorname{arcctg} 5 \left(\frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} \right) \cdot \sqrt{3^{\cos 2x}}; \quad \text{б)} \quad y = (\ln 5x + 7)^{\sqrt[3]{x} + 2x};$$

$$\text{в)} \quad tg^2 y + e^x + e^y - \sin^2 x = 0; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = (t^2 + \sqrt{t})9^t \\ y = \arccos t + \ln t \end{cases}.$$

$$82. \quad \text{a)} \quad y = \frac{\ln^2 \operatorname{ctg} x + 3^{-x}}{\sqrt{\sin 5x + x^2}}; \quad \text{б)} \quad y = \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} \right)^{\ln x + 5\pi};$$

$$\text{в)} \quad x^5 y^5 + \cos^3 x - \frac{1}{y} + 2^y = 0; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = t^5 \cos 8t \\ y = (\arcsin t + \arccos t)^2 e^t \end{cases}.$$

$$83. \quad \text{a)} \quad y = \sqrt[3]{\cos^2 7x} \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{9} - 4^{-x} \right); \quad \text{б)} \quad y = (8 - 5 \operatorname{arctg} x)^{\cos 2x - x};$$

$$\text{в)} \quad \ln^3 y + \sqrt{x^2 + x} - \sin(x - y) - \frac{1}{y} = 0; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t}} + 1 \\ y = \frac{t^5 - t}{\ln t} \end{cases}.$$

$$84. \quad \text{a)} \quad y = (\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arcctg} 2x)^5 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \cos 5x; \quad \text{б)} \quad y = \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\operatorname{tg} 5x + x};$$

$$\text{в)} \quad \sqrt[4]{\cos^3 x} + 7^{x+y} - \ln^2 y + x^3 = 0; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = 5^t \cos 3t \\ y = 5^t \sin 3t \end{cases}.$$

$$85. \quad \text{a)} \quad y = \arcsin^4 \left(\ln^3 \left(\sqrt[5]{(2x^2 + x)^2} \right) \right); \quad \text{б)} \quad y = \left(\sqrt{7 - 5x - 3x^2} \right)^{x^2 + \sin x};$$

$$\text{в)} \quad \operatorname{arctg} 2y + x^5 y^6 - 3^x + \sqrt[5]{y} = 0; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = \ln^7 \operatorname{tg} t \\ y = \sqrt{\cos 2x + t^5} \end{cases}.$$

$$86. \quad \text{a)} \quad y = (\arccos 9x + \arcsin 9x)^{10} \cdot \operatorname{arctg} x \cdot 7^{\sqrt{x}}; \quad \text{б)} \quad y = (\ln^2 x + x^5)^{\sqrt{x + \cos x}};$$

$$\text{в)} \quad \frac{1}{y^2} + \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x + e^{x+y} = 0; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = \frac{t}{\sin t} \\ y = \sqrt[3]{t^2 + 1} + 2t \end{cases}.$$

$$87. \quad \text{a)} \quad y = \frac{\sqrt{\ln^2 x + tg 2x}}{8^x \cdot \sqrt{x^3 - 4x}}; \quad \text{б)} \quad y = \left(5 + \frac{3}{x^2}\right)^{(6-x)^3};$$

$$\text{в)} \quad \sqrt[3]{5xy - x} + 2^{\ln y} - x^4 y^7 = e; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = \frac{\cos 2t}{t} - 1 \\ y = \ln^3 t^2 + \sqrt{t} \end{cases}.$$

$$88. \quad \text{a)} \quad y = (\sin 2x + x) \cdot \sqrt{\arctg x} \cdot 2^{ctg x}; \quad \text{б)} \quad y = \left(\sqrt[5]{\cos 4x + 1}\right)^{x^3 + x};$$

$$\text{в)} \quad \cos(x - y) + \lg^2 y + x^4 y^9 = 10; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \cdot tg 5t \\ y = 9^{t^2} - t \end{cases}.$$

$$89. \quad \text{a)} \quad y = \sin^4 \ln^6 \sqrt[3]{\cos^2 x + x^3}; \quad \text{б)} \quad y = \left(2 - \sin^3 2x\right)^{\sqrt{x} - 4};$$

$$\text{в)} \quad ctg(x^2 - y) + \ln^4 x - e^{\sqrt{y}} = x^2; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = t^2 \cdot 2^t \cdot \ln t \\ y = \arccos^2 8t \end{cases}.$$

$$90. \quad \text{a)} \quad y = \left(\arcsin \frac{x}{2} + \arccos \frac{x}{2}\right)^7 ctg^3 \ln^2 x; \quad \text{б)} \quad y = \left(\frac{1}{\cos x} + \sqrt[3]{x}\right)^{\lg x};$$

$$\text{в)} \quad (x + y)^2 - 3xy + tg^2 y = 5x; \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x = (arctg 2t + arcctg 2t)^2 e^t \\ y = t\sqrt{2^t + 1} \end{cases}.$$

У задачах 91-100 виконати вказані завдання.

91. Під яким кутом перетинаються криві $y = x^2$ та $y^2 = x$?

92. В якій точці кривої $y = 3x^2 - 5x + 1$ нормаль до цієї кривої має кутовий коефіцієнт, що дорівнює 2?

93. Під яким кутом крива $y = 3 \cdot 2^{-x}$ перетинає пряму $y = 3$?

94. Хорда параболи $y = 3x^2 + 6x - 2$ з'єднує точки з абсцисами $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Скласти рівняння тієї дотичної, що буде паралельна хорді.

95. На кривій $y = x^3 - 2x^2 - x$ лежить точка з ординатою, що дорівнює $y = -2$. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої в цій точці (всі випадки).

96. Пряма $y = \frac{5}{6}x + \frac{7}{12}$ для графіка функції $y = 2x^3 - 3x^2 - \frac{67}{6}x$ є

дотичною. Знайти координати точки дотику (всі випадки).

97. Написати рівняння дотичних і нормалей до кривої $y = \frac{10}{x^2 + 1}$ у точках

її перетину з параболою $y = \frac{x^2}{2}$.

98. В якій тичці дотична до кривої $y = x^5 - 5x^4 + 20x^2 - 3$ буде перпендикулярна до прямої $y = -\frac{1}{160}x + 7$ (всі випадки).

99. Із листа металу 16×10 м² виготовити відкритого відкритий бак максимального об'єму.

100. Об'єм відкритого циліндричного чана має дорівнювати заданому значенню V . Якими повинні бути радіус основи і висота чана, щоб металу на його виготовлення пішло найменше?

У задачах 101 – 110 виконати повне дослідження функції та побудувати її графік.

101. $y = x - 2\arctg x$

106. $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

102. $y = 16x(x - 1)^3$

107. $y = \frac{(x + 1)^2}{x - 2}$

103. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$

108. $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$

104. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$

109. $y = \left(\frac{x + 2}{x - 2} \right)^2$

105. $y = 2x - 2\arcsin x$

110. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$

У задачах 111-120 з'ясувати, чи задовольняє задана функція вказаному рівнянню

$$111. z(x, y) = \sqrt{x^2 - 3y^2}; \quad 3y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$112. z(x, y) = \operatorname{tg}^3(2x - 3y); \quad 3 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$113. z(x, y) = \sin^2(3x - 4y); \quad 4 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$114. z(x, y) = \ln(x^2 - y^2); \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x + y};$$

$$115. z(x, y) = \sqrt[3]{2x^2y^2}; \quad 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$116. z(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2;$$

$$117. z(x, y) = \ln(e^x + e^y); \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1;$$

$$118. z(x, y) = \frac{y^2}{3x} + \arcsin xy; \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0;$$

$$119. z(x, y) = x^2y + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{xy}; \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot y;$$

$$120. z(x, y) = \cos^2(2x + 3y); \quad 3 \frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

У задачах 121 - 130 дослідити функцію на екстремум

$$121. z(x, y) = \frac{1}{6}(2x + y)^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + y$$

$$122. z(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$$

$$123. z(x, y) = x^2 + y^2 - y$$

$$124. z(x, y) = 5 \cdot x^2 + y^3 + xy$$

$$125. z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

$$126. z(x, y) = -4x^2 - 3y^2 + 6xy + 4x + 6y + 1$$

$$127. z(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x + 4y - 1$$

$$128. z(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x + 6y - 2$$

$$129. z(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 6xy + 2x + 4y + 1$$

$$130. z(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 2y - 11$$

У задачах 131 - 140 знайти умовний екстремум функції двох змінних при заданому рівнянню зв'язку.

$$131. z(x, y) = -4x^2 - 3y^2 + 6xy + 4x + 6y + 1, \quad -8x + 3y = 6.$$

$$132. z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x + 6y + 2, \quad 16x + 3y = -70.$$

$$133. z(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x + 4y + 3, \quad -7x + 2y = 14$$

$$134. z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 4xy - 4x - 2y + 1, \quad 2x = -2$$

$$135. z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 4xy + 4x + 6y + 1, \quad x + y = 2.$$

$$136. z(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x + 4y - 10, \quad x + 3y = -4$$

$$137. z(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x + 4y - 1, \quad 7x + y = 9$$

$$138. z(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x + 6y + 12, \quad x + y = 3$$

$$139. z(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y - 5, \quad 3x - 10y = 11$$

$$140. z(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy - 4x - 2y + 2, \quad 3x - y = 1$$

У задачах 141 - 150 задано функцію $z(x, y)$, точку $A(x_0, y_0)$ та вектор $\vec{a}(a_x, a_y)$. Знайти

а) градієнт функції $z(x, y)$ в точці $A(x_0, y_0)$;

б) похідну функції $z(x, y)$ в точці $A(x_0, y_0)$ за напрямом $\bar{a}(a_x, a_y)$.

141. $z(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 y)$; $A(1; 1)$, $\bar{a}(-4, -3)$;

142. $z(x, y) = \ln(x + \sin y)$; $A(1; 0)$, $\bar{a}(2, 1)$;

143. $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; $A(1; 1)$, $\bar{a}(1, 1)$;

144. $z(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $A(0; 1)$, $\bar{a}(-5, 12)$;

145. $z(x, y) = \ln(1 + xy^2)$; $A(1; 0)$, $\bar{a}(3, 4)$;

146. $z(x, y) = \arcsin(xy)$; $A(1; 1)$, $\bar{a}(-4, 3)$;

147. $z(x, y) = x \cdot e^{2y} + y \cdot e^{-x}$; $A(0; 0)$, $\bar{a}(-3, 4)$;

148. $z(x, y) = (1 + xy)^2$; $A(1; 1)$, $\bar{a}(12, -5)$;

149. $z(x, y) = \sin(x - e^{2y})$; $A(1; 0)$, $\bar{a}(5, -12)$;

150. $z(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 y)$; $A(1; 1)$, $\bar{a}(1, 1)$.

У задачах 151-160 знайти невизначені інтеграли.

151. а) $\int x \sqrt{5x^2 + 2} dx$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$; в) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$;

г) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x+1)(x-1)} dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x - \sqrt[3]{x^2}} dx$.

152. а) $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}$; б) $\int \ln(x^2 + 1) dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$;

г) $\int \frac{x^2 - x + 4}{(x-3)(x+1)(x-2)} dx$; д) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

$$153. \quad \text{a)} \quad \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx; \quad \text{б)} \quad \int \arctg \sqrt{x} dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{(4x-3)dx}{x^2-2x+6};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx; \quad \text{д)} \quad \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$154. \quad \text{a)} \quad \int e^x \sin(e^x) dx; \quad \text{б)} \quad \int \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-2x^2}};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} dx; \quad \text{д)} \quad \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx.$$

$$155. \quad \text{a)} \quad \int e^{\cos x} \sin x dx; \quad \text{б)} \quad \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)} dx; \quad \text{д)} \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$156. \quad \text{a)} \quad \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad \text{б)} \quad \int e^{-x/3} x^3 dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx; \quad \text{д)} \quad \int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2}.$$

$$157. \quad \text{a)} \quad \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б)} \quad \int x^2 \ln(1+x) dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}; \quad \text{д)} \quad \int \frac{dx}{1+\tg x}.$$

$$158. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad \text{б)} \quad \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}; \quad \text{д)} \quad \int \frac{dx}{3\cos x+2}.$$

$$159. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{\arccos^2 3x \sqrt{1-9x^2}}; \quad \text{б)} \quad \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx; \quad \text{в)} \quad \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}};$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{2x dx}{(x+1)(x^2+1)^3}; \quad \text{д)} \quad \int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x} dx.$$

$$160. \quad \text{a)} \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} dx}{\cos^2 x}; \quad \text{б)} \int x 3^x dx; \quad \text{в)} \int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}};$$

$$\text{г)} \int \frac{(x+2)dx}{(x^2+2x+2)^3}; \quad \text{д)} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} dx.$$

У задачах 161 – 170 обчислити визначені інтеграли.

$$161. \quad \text{a)} \int_{-1}^{20} \frac{dx}{5 + \sqrt{3x+4}}; \quad \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{12}} 2^x \cos 3x dx.$$

$$162. \quad \text{a)} \int_2^{15} \frac{dx}{21 + \sqrt{7x-5}}; \quad \text{б)} \int_1^8 x \log_2^2 x dx.$$

$$163. \quad \text{a)} \int_1^{32,5} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2x-1}}; \quad \text{б)} \int_{-5}^0 (x^2 + x - 20) \sin 2x dx.$$

$$164. \quad \text{a)} \int_{26}^{63} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2}; \quad \text{б)} \int_0^6 (x^2+1) \cdot 3^{-\frac{x}{3}} dx.$$

$$165. \quad \text{a)} \int_{-1}^{25} \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+2}+3)^2}; \quad \text{б)} \int_{-1}^3 (2x-x^2) \cdot 5^x dx.$$

$$166. \quad \text{a)} \int_0^{2,5} x^2 \sqrt{25-x^2} dx; \quad \text{б)} \int_1^2 (x^2+3x) \cdot \ln\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right) dx.$$

$$167. \quad \text{a)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 5 \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \cos 2x dx; \quad \text{б)} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x+1}{\sin^2 2x} dx.$$

$$168. \quad \text{a)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos 2x} - 3\sqrt{\operatorname{ctg} x + 2}}{\sin^2 x} dx; \quad \text{б)} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2x^2 - 7x) \sin 4x dx.$$

$$169. \text{ а) } \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \right) dx; \quad \text{ б) } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+5}{\cos^2 x} dx.$$

$$170. \text{ а) } \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{\log_2^5(x+1)}}{x+1} dx; \quad \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4^x \sin 2x dx.$$

У задачах 171 – 180 виконати вказані завдання.

171. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2 - 5x + 1$ та $y = 2x - 2$.

172. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі абсцис фігури обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ та $y = 2x$.

173. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \log_2 x$, $y = 2^x$, $x = 2$, $x = 4$.

174. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y = 6x - x^2$ та $y = 0$.

175. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{2}$ та $y = \frac{1}{1+x^2}$.

176. Знайти координати центра ваги однорідної плоскої пластини (густина поверхневої речовини $\gamma = \text{const}$), обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

177. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 3$.

178. Знайти площу фігури, обмеженої трипелюстковою трояндою $\rho = a \sin 3\varphi$.

179. Знайти координати центра ваги однорідної плоскої пластини (густина поверхневої речовини $\gamma = \text{const}$), обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e^2$.

180. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис частини фігури, обмеженої лініями $y = x^3$ та $y = 2x - x^2$ (взяти ту частину фігури, що знаходиться в першій чверті системи координат).

В задачах 181 – 190 обчислити довжину дуги кривої.

181. $y^2 = x^3$, $x^2 + y^2 = 12$ (йдеться про частину напівкубічної параболи, що знаходиться всередині кола).

182. $y = x^3$, $x + y = 2$ (йдеться про частину параболи між точками її перетину з прямою).

$$183. \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

$$184. \rho = 2(1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$185. \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

186. $x^2 = y^3$, $y = x^2$ (йдеться про частину напівкубічної параболи, що знаходиться всередині «звичайної» параболи).

$$187. y = \ln\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right), \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$188. \begin{cases} x = e^t \cos 2t \\ y = e^t \sin 2t \end{cases}, \quad \ln \frac{\pi}{4} \leq t \leq \ln \frac{\pi}{2}.$$

$$189. y = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}, \quad \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{8}.$$

190. $y = 4x - x^2$, $y = 2x$ (йдеться про частину параболи між точками її перетину з прямою).

У задачах 191 – 200 обчислити невластиві інтеграли або довести їх розбіжність.

$$191. \text{ a) } \int_0^{\infty} (x+1) \arctan(x+1) dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$$

$$192. \text{ a) } \int_1^{\infty} x \ln(x+1) dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

$$193. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$$

$$194. \text{ a) } \int_0^{\infty} x 5^{-x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$195. \text{ a) } \int_{2/\pi}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$196. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}$$

$$197. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{\arctan 2x}{x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_1^2 \ln(x-1) dx$$

$$198. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{1 + \cos x}{\sqrt[3]{x^2 + 5}} dx$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^7}} dx$$

$$198. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^2}}$$

$$199. \text{ a) } \int_{2/\pi}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^3} dx$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{e^{2/x} dx}{x^2}$$

$$200. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

У задачах 201 –211 виконати вказані завдання.

201. Знайти роботу потрібну на будівництво правильної трикутної піраміди з висотою H та стороною основи a . Густина матеріалу ρ .

202. Знайти роботу потрібну на викачування рідини гущиною ρ з котла в формі конуса розташованого вершиною вниз. Радіус основи конуса R , висота H .

203. Знайти роботу потрібну на розтягування мідної проволочки довжиною L з площею поперечного перетину S на величину $H = 0,001S$. Сила натягнення визначається законом Гука: $F = ESx/L$.

204. Знайти силу тиску рідини з гущиною ρ на вертикальне розташовану в неї пластину, якщо пластина має форму трапеції висотою H , з нижній основою a та верхньою основою b . Верхня основа пластини співпадає з рівнем рідини.

205. Знайти роботу потрібну для викачування рідини з гущиною ρ з сосуду в формі горизонтального циліндру довжиною H та радіусом основи R .

206. Знайти роботу потрібну на будівництво споруди у формі полу кулі радіусу R розташованого вершиною вгору. Густина матеріалу ρ .

207. Знайти силу тиску рідини з гущиною ρ на вертикальне розташовану в неї пластину, якщо пластина має форму кола радіуса R та торкається поверхні рідини.

208. Знайти роботу потрібну на виїмку ґрунту з котловану у формі усіченого конуса з висотою H та радіусами основ R_1 та R_2 . Густина ґрунту ρ .

209. Знайти силу тиску рідини з гущиною ρ на вертикальне розташовану в неї пластину, якщо пластина має форму рівнобічного трикутника з висотою H , основа якого розташована паралельно рівню рідини і знаходиться на глибини $2H$ а протилежна до основи вершина знаходиться на глибини $3H$.

210. Знайти роботу потрібну на будівництво споруди у формі правильної усіченої чотирикутної піраміди, висотою H , стороною нижньої основи a і стороною верхньої основи b . Густина матеріалу ρ .

У задачах 211-220 знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

211. a) $xy' - y \ln y = 0$

$$6) \quad x^3 y'' + x^2 y' = 1$$

212. a) $\ln(\cos x)y' + y \tan x = 0$

$$6) \quad x^2 y'' + xy' = 1$$

213. a) $(1+x^2)y' + y = \arctan x$

$$6) \quad xy'' - y' = x^2 e^x$$

214. a) $xy' + y = xy^2 \ln x$

$$6) \quad y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$$

215. a) $(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx$

6) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$

216. a) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

$$6) \quad y''x = y' + x \sin \frac{y'}{x}$$

217. a) $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$

6) $y''x + y' = \ln x$

218. a) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

6) $y'' = 2 - y$

219. a) $2xdy + (1+x)\sin^2 y tgydx = 0$

$$6) y'' = \sin^2 x + x \sin 2xy$$

220. a) $y' + \frac{e^x y}{e^x + 1} = x$

$$6) \quad 2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$$

У задачах 221-230 знайти частинний розв'язок диференційного рівняння.

221. $y'' - 2y' = x^2 - 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

222. $y'' + y = -\sin 2x, \quad y'(0) = -\frac{1}{3}, \quad y(0) = 1.$
223. $y'' - 3y' + 2y = -e^x, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
224. $y'' + 2y' + 2y = 1 - x^2, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 2.$
225. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, \quad y'(0) = 3,2, \quad y(0) = 1.$
226. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y'(0) = 5, \quad y(0) = 2.$
227. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2, \quad y'(0) = 5, \quad y(0) = 0.$
228. $y'' + 4y' = 4\cos 2x - 12\sin 2x, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 2.$
229. $y'' - 3y' = x^2 - 3x, \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$
230. $y'' + 2y' + y = 3e^x, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

У задачах 231-240 знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь.

$$231. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases}$$

$$236. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y + 14e^{6t} \end{cases}$$

$$232. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}$$

$$237. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$233. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$$

$$238. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$234. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$239. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

$$235. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -10x - 5y + 10 - 6t \end{cases} \qquad 240. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

У задачах 241-250 виконати вказані завдання.

241. матеріальна точка рухається зі швидкістю обернено пропорційною пройденій відстані. У початковий момент часу точка знаходилась на відстані 3 м від початку відліку та мала швидкість 15 м/с. Визначити пройдений шлях та швидкість точки через 7 с після початку руху.

242. Знайти рівняння кривої, яка проходить через початок координат та володіє властивістю: кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій її точці дорівнює сумі координат тієї ж точки.

243. Чан циліндричної форми з вертикальною віссю заввишки 6 м і діаметром 4 м має в дні отвір радіуса $1/12$ м. Знайти час, за який вода витече із заповненого чана.

244. Знайти лінію, яка проходить через точку $M(3;4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї у будь-якій точці у два рази менше за кутовий коефіцієнт радіуса-вектора точки дотику.

245. Швидкість зміни температурі тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Нагріте до 100°C тіло охолodилось до 60°C при температурі навколишнього повітря 20°C за 20 хвилин. Через скільки хвилин температура тіла зменшиться до 25°C .

246. Знайти сім'ю кривих, у яких початкова ордината будь-якої дотичної на 2 одиниці менше за абсцису точки дотику.

247. Моторний човен рухається в стоячій воді із швидкістю 20 км/год. Через 40 с після того як двигун вимикають, швидкість човна зменшується до 8 км/год. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 хвилини після зупинки двигуна.

248. Знайти криву, яка проходить через точку $M(1;1)$ та має таку властивість, що відрізок, який відсікає на осі ординат дотична, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

249. Маса пілота з парашутом становить 80 кг. Опір повітря при опусканні парашута пропорційне квадрату його швидкості ($k = 400$). Визначить швидкість опускання залежно від часу.

250. Знайти лінію, яка проходить через точку $M(2;0)$, якщо відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину $l = 2$.

У задачах 251 – 260 Дослідити на збіжність числові ряди

$$251. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{(\sqrt{2})^n}$$

$$256. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{\ln n}}$$

$$252. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{5n^2+1}$$

$$257. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n-3} \right)^n$$

$$253. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5n^2+3}$$

$$258. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n!}$$

$$254. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{(\sqrt{3})^n}$$

$$259. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{6})^n}{n!}$$

$$255. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{e^n}$$

$$260. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}$$

У задачах 261 – 270 дослідити числові ряди на абсолютну та умовну збіжність

$$261. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{2})^n}$$

$$266. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-1)}{n(n+2)}$$

$$262. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5n^2+1}$$

$$267. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (5n-1)}{n!}$$

$$263. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$$

$$268. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n+5)}{n!}$$

$$264. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+3)^2}$$

$$269. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^3 + n)}{n^6 + 1}$$

$$265. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n+1)}{2^n}$$

$$270. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(n+1)!}$$

У задачах 271 - 280 знайти область збіжності степеневих рядів та дослідити їх поведінку в граничних точках інтервалу збіжності

$$271. \text{ а) } \frac{(x+1)}{\sqrt{2} \cdot 3} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2^3} \cdot 7} + \frac{(x+1)^3}{\sqrt{2^5} \cdot 11} - \dots \quad \text{ б) } \frac{2 \cdot x^0}{1!} + \frac{2^2 \cdot x}{2!} + \frac{2^3 \cdot x^2}{3!} + \dots$$

$$272. \text{ а) } \frac{(3x+2)}{1} - \frac{(3x+2)^2}{3 \cdot 2} + \frac{(3x+2)^3}{5 \cdot 2^2} - \dots \quad \text{ б) } \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 3^3} + \dots$$

$$273. \text{ а) } \frac{(x-4)}{1} + \frac{(x-4)^2}{3 \cdot 2} + \frac{(x-4)^3}{5 \cdot 2^2} + \dots \quad \text{ б) } \frac{x}{2 \cdot 4} - \frac{x^3}{5 \cdot 4^2} + \frac{x^5}{8 \cdot 4^3} - \dots$$

$$274. \text{ а) } \frac{(x+2)}{1} + \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(x+2)^3}{3} + \dots \quad \text{ б) } \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \dots$$

$$275. \text{ а) } \frac{(x-5)}{3} - \frac{(x-5)^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x-5)^3}{3 \cdot 3^3} - \dots \quad \text{ б) } \frac{2 \cdot x^2}{5} + \frac{4 \cdot x^4}{7} + \frac{8 \cdot x^6}{9} + \dots$$

$$276. \text{ а) } \frac{(x-2)}{5} + \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 5^3} + \dots \quad \text{ б) } \frac{x}{2 \cdot 5} - \frac{x^2}{3 \cdot 8} + \frac{x^3}{4 \cdot 11} - \dots$$

$$277. \text{ а) } \frac{(3x+2)}{3} - \frac{(3x+2)^2}{9} + \frac{(3x+2)^3}{27} - \dots \quad \text{ б) } \frac{5 \cdot x}{1!} + \frac{5^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{5^3 \cdot x^3}{3!} + \dots$$

$$278. \text{ а) } \frac{(5x-3)}{9} + \frac{(5x-3)^2}{2 \cdot 9^2} + \frac{(5x-3)^3}{3 \cdot 9^3} + \dots \quad \text{ б) } \frac{x^0}{\sqrt[3]{1}} - \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{3}} - \dots$$

$$279. \text{ а) } \frac{(x+3)}{1} + \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(x+3)^3}{9} + \dots \quad \text{ б) } \frac{\sqrt{1} \cdot x}{1!} + \frac{\sqrt{2} \cdot x^3}{2!} + \frac{\sqrt{3} \cdot x^5}{3!} + \dots$$

$$280. \text{ а) } \frac{(2x-3)}{2} - \frac{(2x-3)^2}{5 \cdot 2} + \frac{(2x-3)^3}{8 \cdot 2^2} - \dots \quad \text{б) } \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} - \frac{\sqrt{5} \cdot x^2}{2^2} + \frac{\sqrt{7} \cdot x^3}{2^3} - \dots$$

У задачах 281 - 290 розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0

$$281. f(x) = \sqrt[3]{x+5}, \quad x_0 = 3$$

$$286. f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$282. f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad x_0 = 5$$

$$287. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2$$

$$283. f(x) = e^{4x}, \quad x_0 = \frac{1}{4}$$

$$288. f(x) = 3^x, \quad x_0 = 2$$

$$284. f(x) = x^{-3}, \quad x_0 = 1$$

$$289. f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad x_0 = 1$$

$$285. f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 16$$

$$290. f(x) = \cos(3x), \quad x_0 = \frac{\pi}{12}$$

У задачах 291 - 300 знайти три перших, відмінних від нуля члени розвинення в ряд Маклорена функції $f(x)$

$$291. f(x) = \frac{x+1}{(x+3)^2}$$

$$296. f(x) = 9^x$$

$$292. f(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$297. f(x) = e^{\sin x}$$

$$293. f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$$

$$298. f(x) = 3^x \cdot \cos x$$

$$294. f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$299. f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$295. f(x) = e^x \cdot \cos x$$

$$300. f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

У задачах 301 – 310 обчислити площу фігури, яка обмежена заданими лініями. Обчислення зробити з точністю до 10^{-3}

$$301. y(x) = e^{-\frac{x^3}{3}}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

$$302. y(x) = \sqrt{1+x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$303. y(x) = \sin \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

$$304. y(x) = \operatorname{arctg} x^3, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

$$305. y(x) = \ln(1+x^3), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

$$306. y(x) = \sqrt[3]{27-x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0$$

$$307. y(x) = \cos(3x^2), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$308. y(x) = x^2 \cdot \sin x^2, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

$$309. y(x) = \sqrt[6]{1-x^2}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

$$310. y(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

У задачах 311 - 320 знайти перші три (відмінні від нуля) члени розвинення в ряд Маклорена частинного розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$311. y' = x \cdot y, \quad y(0) = 1$$

$$316. y' = \sin x + \frac{y^3}{3}, \quad y(0) = 2$$

$$312. y' = \frac{x+y}{1+x+y}, \quad y(0) = 1$$

$$317. y' = e^y + x, \quad y(0) = 4$$

$$313. y' = 2 \cos x + y^2, \quad y(0) = 1$$

$$318. y' = x^2 + x + y, \quad y(0) = 6$$

$$314. y' = 2e^x + x \cdot y, \quad y(0) = 2$$

$$319. y' = e^x + \frac{x}{y}, \quad y(0) = 8$$

$$315. y' = x + x^3 + y^3, \quad y(0) = 3$$

$$320. y' = \sin^2 x + y^2, \quad y(0) = 3$$

У задачах 321 – 330 розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi, \pi)$

$$321. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$326. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 3 & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$322. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$327. f(x) = 3x - 5$$

$$323. f(x) = x + 2$$

$$328. f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$324. f(x) = \frac{x}{4}$$

$$329. f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$325. f(x) = \frac{x}{3} + 1$$

$$330. f(x) = \frac{x}{\pi}$$

У задачах 331 – 340 вичислити повторний інтеграл змінивши порядок інтегрування

$$331. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} (4xy + 6) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} (4xy + 6) dx$$

$$332. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 (x+2y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 (x+2y) dx$$

$$333. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 (x+2) dx + \int_0^e dy \int_{-1}^{-\ln y} (x+2) dx$$

$$334. \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 (4xy^3 - 1) dx + \int_0^1 dy \int_0^1 (4xy^3 - 1) dx$$

$$335. \int_{-2}^0 dx \int_{-y}^2 (y + 4x^2) dy + \int_0^1 dx \int_{2x}^2 (y + 4x^2) dy$$

$$336. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (y - 4xy) dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^1 (y - 4xy) dy$$

$$337. \int_0^1 dy \int_0^{x^3} (6xy^2 + 6) dx + \int_0^2 dy \int_0^{2-y} (6xy^2 + 6) dx$$

$$338. \int_0^1 dy \int_0^y (2y - 2x) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 (2y - 2x) dx$$

$$339. \int_0^2 dy \int_0^{y/2} (2xy - 4) dx + \int_2^3 dy \int_0^{3-y} (2xy - 4) dx$$

$$340. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} 3xy dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 3xy dx$$

У задачах 341 – 350 за допомогою подвійного інтегралу знайти об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями.

$$341. \text{ а) } y = 1 - x^2; \quad y = x - x^2; \quad z = 0; \quad z = x.$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 + z^2 = 16; \quad x^2 + y^2 = 4; \quad x^2 + y^2 \geq 4.$$

$$342. \text{ а) } y = 2x^2; \quad y + x = 3; \quad z = 0; \quad z = 2x, \quad x \geq 0.$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad x^2 + y^2 = 3y.$$

$$343. \text{ а) } x = y^2; \quad y + z = 1; \quad x = 1; \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 = 2y; \quad z = 1,25 - x^2; \quad z = 0.$$

$$344. \text{ а) } xy = 4; \quad y = x; \quad z = x; \quad x = 4, \quad z = 0.$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 = 6x; \quad x^2 + y^2 = 9x; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = 0; \quad y \leq 0.$$

$$345. \text{ а) } y = x^3; \quad y + x^2 = 0; \quad x = 1; \quad z = x, \quad z = 0.$$

$$\text{б)} x^2 + y^2 = 1; \quad z = 1 - x^2; \quad z = 0.$$

$$346. \text{ а)} y^2 = x; \quad y^2 = 2 - x; \quad z = 2y; \quad z = 0, \quad y \geq 0.$$

$$\text{б)} x^2 + y^2 = 8; \quad x^2 + y^2 = 2z^2; \quad z = 0; \quad z \geq 0.$$

$$347. \text{ а)} x^2 + y^2 = 8; \quad x = \sqrt{2y}; \quad x = 0; \quad z = 0; \quad z = \frac{30y}{11}.$$

$$\text{б)} x^2 + y^2 = z^2; \quad y = x; \quad y = 0; \quad z = 2; \quad x \geq 0.$$

$$348. \text{ а)} xy = 8; \quad y = x^2; \quad z = 16 - x^2; \quad z = 0; \quad y \geq 0.$$

$$\text{б)} x^2 + y^2 + 4x = 0; \quad z = 8 - y^2; \quad z = 0.$$

$$349. \text{ а)} x^2 + y^2 = 9; \quad y = 7 - x^2; \quad z = y; \quad z = 0; \quad z \geq 0; \quad x^2 + y^2 \geq 9.$$

$$\text{б)} z = x^2 + y^2; \quad z = 2x.$$

$$350. \text{ а)} z = 4 - x^2; \quad y = 0; \quad y = x; \quad z = 0, \quad x \geq 0.$$

$$\text{б)} z = y^2; \quad x^2 + y^2 = 1; \quad z = 0.$$

У задачах 351 – 360 за допомогою подвійного інтегралу знайти координати центру мас та моменти інерції відносно координатних осей однорідної пластини з поверхневої густиною γ , обмежених заданими лініями:

$$351. y = (x - 2)^3; \quad y = x - 2; \quad x \geq 0.$$

$$352. y = x^2; \quad y = 2.$$

$$353. y = x^2; \quad y = \frac{1}{x}; \quad y = 4; \quad x \geq 0,25.$$

$$354. y = 2 - x^2; \quad y = 1.$$

$$355. y = x^3; \quad x = 2; \quad y = 0.$$

$$356. y^2 = x; \quad x = 0; \quad y = 2.$$

$$357. y = e^x; \quad x = 0; \quad x = 1; \quad y = 0.$$

$$358. y = \sin x; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2}; \quad y = 0.$$

$$359. y = \ln x; \quad x = 1; \quad x = e; \quad y = 0.$$

$$360. y = \cos 2x; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}; \quad y = 0.$$

У задачах 361 – 370 знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні уздовж лінії L від точки M до точки N .

$$361. \vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}; \quad L: y = x^3; \quad M(0;0); \quad N(1;1).$$

$$362. \vec{F} = x^2y\vec{i} + (y - x)\vec{j}; \quad L: y = x^2 + 1; \quad M(1;2); \quad N(2;5).$$

$$363. \vec{F} = (3xy^2 - 2y)\vec{i} + x^2\vec{j}; \quad L: y = 1 - x^2; \quad M(0;1); \quad N(-1;0).$$

$$364. \vec{F} = (x^2 + 2y^2)\vec{i} + (x - y)^2\vec{j}; \quad L: y^2 + x^2 = 16; \quad M(0;4); \quad N(-4;0).$$

$$365. \vec{F} = (3x - y)\vec{i} - (2x + y)\vec{j}; \quad L: 3y + x^2 = 9; \quad M(0;3); \quad N(-3;0).$$

$$366. \vec{F} = 4xy\vec{i} - (x + 2y)\vec{j}; \quad L: 4y^2 + x^2 = 16; \quad M(0;-2); \quad N(-4;0).$$

$$367. \vec{F} = (4x + y)\vec{i} - (x^2 + 2y)\vec{j}; \quad L: x^2 = 4y; \quad M(0;0); \quad N(2;1).$$

$$368. \vec{F} = (3xy^2 + 1)\vec{i} + (2y - x)\vec{j}; \quad L: 2y = 4 - x^2; \quad M(0;2); \quad N(-2;0).$$

$$369. \vec{F} = (x - y)^2\vec{i} - 3y^2\vec{j}; \quad L: x^2 + y^2 = 9; \quad M(0;-3); \quad N(3;0).$$

$$370. \vec{F} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j}; \quad L: y^2 = 2 - 2x; \quad M(0;2); \quad N(-2;6)$$

У задачах 371-380 перевірити, чи залежить інтеграл від форми кривої L . Обчислити цей інтеграл, якщо L – довільна лінія з початком у точці A і кінцем у точці B .

$$371. \int_L (x + 3y)dx + (y + 3x)dy; \quad A(1;1); \quad B(2;3).$$

$$372.. \int_L \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy; \quad A(1;-2); \quad B(3;4).$$

373. $\int_L (2x^4 - 2y)dx + (4y^3 - 2x)dy; \quad A(-1;1); \quad B(2;-1).$
374. $\int_L (4xy^3 + 3xy^2)dx + (6x^2y^2 + 3x^2y)dy; \quad A(-2;3); \quad B(1;1).$
375. $\int_L (x^2y - 2x)dx + (\frac{1}{3}x^3 + 6y)dy; \quad A(2;1); \quad B(4;3).$
376. $\int_L (5x^2y - x^3)dx + (\frac{5}{3}x^3 - 3y^2)dy; \quad A(-1;-3); \quad B(1;2).$
377. $\int_L (6y^2 - 2xy)dx + (12xy - x^2)dy; \quad A(-2;-1); \quad B(2;3).$
378. $\int_L (2x^2y + x - 1)dx + (12xy - x^2)dy; \quad A(1;2); \quad B(-1;4).$
379. $\int_L (7x + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 + 3y)dy; \quad A(1;4); \quad B(3;1).$
380. $\int_L (3y^3 - 5xy^2)dx + (9xy^2 - 5x^2y)dy; \quad A(-1;-1); \quad B(1;2).$